$\rightsquigarrow$ jetzt in Analysis II als Einschub nach § 17

§ **22**

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Eine gewöhnliche Differentialgleichung *der Ordnung* $k \geq 1$ hat die Form

$$(*) \qquad F\Big(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(k)}(x)\Big) = 0$$

mit **gegebener** Funktion $F : I \times \mathbb{R}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}$; hierbei bezeichnet $I \subset \mathbb{R}$ ein **offenes** Intervall.

Es handelt sich also um eine Relation zwischen $x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(k)}(x)$ auf I.

gesucht : eine k-mal diff'bare Funktion $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass $(*)$ gilt für alle $x \in I$.

Beispiele :

(i) $y(x) = e^x$ erfüllt $y'(x) = y(x)$, d.h. mit $F(x, \alpha, \beta) := \beta - \alpha$ gilt: $F\Big(x, y(x), y'(x)\Big) = 0$.

(ii) Die Funktion $y(x) = \sin x$, bzw. $y(x) = \cos x$ erfüllen $y''(x) = -y(x)$ auf $\mathbb{R}$

hier: $F(x, u, v, w) := w + u \Longrightarrow F\Big(x, y(x), y'(x), y''(x)\Big) = 0.$

In diesen Beispielen hängt F **nicht von x ab** $\longrightarrow$ **autonome Differentialgleichung**.

Bemerkungen :

1) Sind $F = (F^1, \ldots, F^m)$, $y = (y^1, \ldots, y^n)$ vektorwertig, so heißt $(*)$

ein System gewöhnlicher Differentialgleichung der Ordnung k.

Beispiel :

$$y(x) \;:=\; (\sin x, \cos x) \qquad \text{löst das Gleichungssystem}$$
$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), \\ y_2'(x) = -y_1(x) \end{cases}$$

Wie sieht F hier aus ?

2) Was bedeutet gewöhnliche Differentialgleichung ?

$y = y(x)$ *h ängt nur von einer reellen* Variablen ab, im Unterschied dazu :
partielle Differentialgleichungen sind Relationen, die zwischen einer Funktion
$u(x_1, \ldots, x_n)$ und ihren partiellen Ableitungen bestehen, z.B.
:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 \text{ oder } \frac{\partial}{\partial t} v - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} = 0 \;\text{ für } v = v(t, x_1, \ldots, x_n)$$

Theorie dazu ist viel komplizierter $\longrightarrow$ Hauptstudium !

3) gewöhnliche Differentialgleichungen beschreiben :

- Bewegungsgleichungen in der Physik

- Reaktionsvorgänge in der Chemie
- Evolutionsmodelle in der Biologie
  $y(t)$ = Anzahl der Mitglieder in einer Population zur Zeit t;
  $y'(t)$ = Änderungsrate
  Literatur : Braun, Differential Equations and their Applications, Springer

4) kann man $(*)$ nach der höchsten Ableitung auflösen, also die Form

   $(**)\quad y^{(k)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(k-1)}(x)),\ x \in I$, erreichen,

   so spricht man von einer **expliziten Differentialgleichung $\mathbf{k}^{\text{ter}}$ Ordnung**

Explizite Gleichungen und Systeme 1^{ter} Ordnung

betrachte $y'(x) = f(x, y(x)),\ x \in I\ (f$ gegeben)

uninteressanter Fall : nicht

f hängt von y ab, d.h.

$y'(x) = f(x),\ x \in I \overset{\text{Hauptsatz}}{\Longrightarrow} y(x) = c + \int\limits_{x_\circ}^{x} f(t)\,dt$, falls f stetig.

Hier gilt : $c \in \mathbb{R},\ x_\circ \in I$ beliebig.

<u>Man sieht direkt</u> :

Ist $x_\circ \in I$ gegeben und sucht man eine Lösung y, die zur Zeit $x_\circ$ den Wert η annimmt, so gibt es **nur genau eine**

Lösung.

Allgemeines vorweg :

- Differentialgleichungen müssen **keine Lösungen** haben!

$$(y(x)-x)^2+(y'(x))^2=0 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} y(x) & = & x \quad \text{und} \\ y'(x) & = & 0 \end{array}\right.$$

- <u>Differentialgleichungen können viele Lösungen haben!</u>

Beispiel :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sqrt[3]{y^2},\ (x,y)\in\mathbb{R} \\ y'(x) &= f(x,y(x)) \end{aligned}$$

Lösung :

$$\varphi_\circ(x) := 0$$

$$\text{oder}\quad \Psi_a(x) := \tfrac{1}{27}(x-a)^3,\ a\in\mathbb{R},$$

$$\text{oder}\quad \Psi_{b,c}(x) := \begin{cases} \Psi_b(x) & ,x\le b \\ 0 & ,b\le x\le c,\ b<c \\ \Psi_c(x) & ,x\ge c \end{cases}$$

speziell :

$\varphi_\circ, \Psi_\circ, \Psi_{b,c}$ $(b<0<c)$ erfüllen alle das Anfangswertproblem $y'(x)=\sqrt[3]{y(x)^2}$ mit $\boxed{y(0)=0}$

<u>unser Ziel</u> :

Bedingungen an $f(x,y)$, die die Existenz von Lösungen zu $y'(x)=f(x,a(x))$ garantieren.

Definition 22.1 :

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *offen und* $f : G \longrightarrow \mathbb{R}^n$. *Wir schreiben* $(x, y) = (x, y_1, \ldots, y_n)$ *für die Variablen von* f.

i) f *heißt* **(partiell) Lipschitz stetig bzgl. der y-Variablen**

$\iff \exists\, L \geq 0 : \Big| f(x, y) - f(x, \tilde{y}) \Big| \leq L \cdot |y - \tilde{y}|$ *für alle* (x, y), $(x, \tilde{y}) \in G$.

ii) f *heißt* **lokal Lipschitz bzgl.** y *(genauer : "lokal partiell"...)*

$\forall\, (x_\circ, y_\circ) \in G\ \exists$ *Umgebung* U *von* $(x_\circ, y_\circ)$ *in* G *und* $L \geq 0$ *mit*

$\Big| f(x, y) - f(x, \tilde{y}) \Big| \leq L \cdot |y - \tilde{y}|$ *für alle* (x, y), $(x, \tilde{y}) \in U$

Bemerkungen :

1) ii) ist offenbar Abschwächung von i)

2) $G := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sqrt[3]{y^2}$ genügt in keiner Umgebung von $(a, 0)$, $a \in \mathbb{R}$ beliebig, einer lokalen Lipschitz Bedingung (denn $t \mapsto \sqrt[3]{t^2}$ ist nicht Lipschitz bei 0)

3) *Wie prüft man die Bedingungen?*

Finde Schranken auf $\frac{\partial f}{\partial y_i}$, $i = 1, \ldots, n$.

Satz 22.1 : *(Eindeutigkeit)*

$f : G \to \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, sei stetig und genüge in G einer lokalen Lipschitz

Bedingung bzgl. y. Seien φ, $\Psi : I \to \mathbb{R}^n$ zwei Lösungen von $y'(x) = f(x, y(x))$ auf

dem Intervall I (mit $(t, \varphi(t))$, $(t, \Psi(t)) \in G$).

Gibt es dann ein $x_\circ \in I$ mit $\varphi(x_\circ) = \Psi(x_\circ)$, so folgt $\varphi = \Psi$ auf ganz I.

Beweis :

1. Schritt :

Behauptung :

Ist $a \in I$ ein beliebiger Punkt mit $\varphi(a) = \Psi(a)$, so gibt es mindestens ein $\varepsilon > 0$ mit $\varphi = \Psi$ für $x \in I, |x - a| < \varepsilon$. ($\Longrightarrow$ $\varphi = \Psi$ auf Umgebung von $x_\circ \cap I$)

Beweis :

Schreibe

$$\varphi(x) - \Psi(x) = \int_a^x \Big(\varphi'(t) - \Psi'(t)\Big)\, dt = \int_a^x \Big(f(t, \varphi(t)) - f(t, \Psi(t))\Big)\, dt.$$

Zu $(a, \varphi(a)) = (a, \Psi(a)) \in G$ existiert Umgebung $U \subset G$ und $L \geq 0$ mit

$$\Big|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\Big| \leq L \cdot \Big|y - \tilde{y}\Big| \text{ für } (x, y),\ (x, \tilde{y}) \in U.$$

φ, Ψ stetig in $a \implies \exists\, \delta > 0$ ($\delta > 0$ so, dass $(t, \varphi(t)),\ (t, \Psi(t)) \in U$) mit

$$\Big|f(t, \varphi(t)) - f(t, \Psi(t))\Big| \leq L \cdot \Big|\varphi(t) - \Psi(t)\Big| \text{ für alle } t \in I,\ |t-a| < \delta$$

Also :

$$\Big|\varphi(x) - \Psi(x)\Big| \leq L \cdot \Big|\int_a^x |\varphi(t) - \Psi(t)|\, dt\Big|,\ x \in I,\ |x-a| < \delta$$

O.E. gilt $L > 0$ und $L \cdot \delta \leq \frac{1}{2}$ (sonst verkleinere δ).

Sei $J := I \cap [a - \frac{\delta}{2}, a + \frac{\delta}{2}]$

$$\implies \quad |\varphi(x) - \Psi(x)| \ \leq\ L \cdot \delta \cdot \underbrace{\max\{|\varphi(y) - \Psi(y)| : y \in J\}}_{=:M}$$

$$\text{für alle } x \in J$$

$$\overset{\text{bilde links max}}{\implies} \quad M \ \leq\ L \cdot \delta \cdot M \quad \leq \tfrac{1}{2} M$$

$$\implies \quad M \ =\ 0,$$

d.h. $\varphi = \Psi$ auf J. Mit $\varepsilon = \delta/2$ folgt die Behandlung.

2. Schritt :

Behauptung :

$$\varphi(x) = \Psi(x) \quad \forall\, x \in I,\ x \geq x_\circ$$

Beweis :

$\eta_\circ := \sup\{\eta \in I :\ \varphi = \Psi \text{ auf } [x_\circ, \eta]\}$;

ist $\eta_\circ = \infty$ oder rechter Endpunkt von $I \implies$ Behauptung, falls nicht $\Longrightarrow \exists\, \delta > 0$ mit $[\eta_\circ, \eta_\circ + \delta] \subset I$

Def. von $\eta_\circ$, Stetigkeit von $\varphi, \Psi \Longrightarrow \varphi(\eta_\circ) = \Psi(\eta_\circ)$;

$\overset{\text{Schritt 1}}{\Longrightarrow} \exists\, \varepsilon > 0$ mit $\varphi = \Psi$ auf $[\eta_\circ, \eta_\circ + \varepsilon]$, Widerspruch zur Def. von $\eta_\circ$.

3. Schritt :

Behauptung :

$\varphi(x) = \Psi(x) \quad \forall x \in I,\ x \leq x_\circ$

Beweis :

analog zu Schritt 2

$\square$

Beispiel :

$G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, f(x,y) = xy^2$, erfüllt überall eine lokale Lipschitz Bedingung bzgl. y, ist allerdings nicht auf ganz G Lipschitz bzgl. y.

Wir zeigen jetzt : | lokale Lipschitz Stetigkeit von f bzgl. y $\Longrightarrow$ lokale Existenz von Lösungen.

Als Hilfsmittel braucht man

Fixpunktsatz von Banach : ($\rightarrow$ Übung)

Sei (X, d) **vollständiger** metrischer Raum und die Abb. $F : A \longrightarrow A$ erfülle

$d\Big(F(x), F(y)\Big) \leq \Theta \; d(x,y)$ für alle $x,\; y \in A$ mit $\boldsymbol{\Theta < 1}$.

Ist A **abgeschlossen**, so hat F **genau einen** Fixpunkt x^*, d.h. $F(x^*) = x^*$.

Für jeden Startwerte $a \in A$ konvergiert dann die rekursiv definierte Folge

$$x_{\circ} = a, \qquad x_{n+1} = F(x_n)$$

gegen x^*.

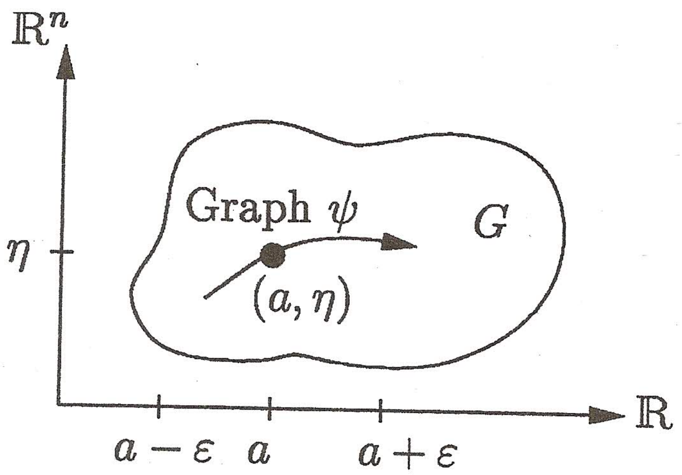
Beweis :

Man rechne nach, dass $\{x_n\}$ eine Cauchy Folge ist.

Satz 22.2 : (Existenzsatz von Picard-Lindelöf)

Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : G \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig und genüge einer **lokalen** *Lipschitz-Bedingung bzgl. y auf G. Dann gibt es zu jedem $(a, \eta) \in G$ ein $\varepsilon > 0$ und eine C^1-Funktion $\Psi : [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit*

$$\begin{aligned} \Psi(a) &= \eta \qquad (\underline{\textit{Anfangsbedingung}}) \\ \Psi'(x) &= f(x, \Psi, (x)) \;\; \textit{auf}\; [a-\varepsilon, a+\varepsilon]. \end{aligned}$$



Bemerkungen zum Satz von Picard-Lindelöf :

1) Satz 22.1 $\Longrightarrow$ Eindeutigkeit

2) man spricht von einem <u>lokalen</u> Existenzsatz, da Ψ und U nur auf einem *sehr kleinen* Intervall um a existiert.

3) Möglicherweise existiert die im Satz gewonnene Lösung aber auch auf einem größeren Intervall als $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$.
Anders als bei linearen Problemen kann man bei nichtlinearen Problemen i.a. keine Existenz für alle Zeiten erwarten! (vgl. Zusatz zu Satz 22.2).

Beispiel :

$y'(x) = 1 + y^2(t),\ y(0) = 0,\ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

wird eindeutig gelöst von $\mathbf{y(x) = \tan x}$, wobei der Definitionsbereich dieser Lösung nicht vergrößert werden kann!

4) Eine Funktion $\Psi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **maximale Lösung** des AWP's

$$\Psi'(x) = f(x, \Psi(x)),\ \Psi(a) = \eta,\ x \in I,$$

wenn es **keine** Lösung $\varphi : J \to \mathbb{R}^n$ gibt, die auf einem Intervall $J \supsetneqq I$ erklärt ist.

Man kann zeigen :

Unter den Voraussetzungen von Satz 22.2 lässt sich die lokale Lösung Ψ zu einer maximalen Lösung fortsetzen.

Spezialfall :

Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig mit einer lokalen Lipschitz Bedingung bzgl. $y \in \mathbb{R}^n$ und $\Psi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ die **maximale Lösung** des AWP's

$$\Psi'(x) = f(x, \Psi(x)),\ \Psi(a) = \eta.$$

Seien $\alpha < \beta$ die Grenzen von I. Dann gilt :

i) $\alpha = -\infty$ **oder**

ii) $\boxed{\alpha > -\infty}$: In diesem Fall ist $\lim\limits_{x \downarrow \alpha} \left|\Psi(x)\right| = \infty$

iii) $\beta = \infty$ **oder**

iv) $\boxed{\beta < \infty}$: In diesem Fall ist $\lim\limits_{x \uparrow \beta} \left|\Psi(x)\right| = \infty.$

5) Falls f nur stetig ist, kann man noch lokale Existenz beweisen, hat aber keine Eindeutigkeit. (**Satz von Peano**)

6) Man kann die Größe von ε genau ausrechnen. Das ergibt unter Umständen globale Existenzsätze. (vgl. Zusatz zu Satz 22.2)

Beweis :

Wir beginnen mit einer Umformulierung des Problems

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Interfall mit $a \in I, \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Dann gilt :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \varphi(a) & = & \eta \\ \varphi'(x) & = & f(x, \varphi(x)),\ x \in I \end{array}\right\} \quad \text{“Anfangswertproblem”}$$

$$\overset{\text{Hauptsatz}}{\Longleftrightarrow} \quad \varphi(x) = \eta + \int\limits_a^x f(t, \varphi(t))\, dt,\ \ x \in I \quad \text{“Integralgleichung”}$$

$$\Longleftrightarrow \quad T(\varphi) = \varphi \qquad (*) \qquad \text{“Fixpunktproblem”}$$